

University of Groningen

Involuties in de stralenruimte

van Dijk, Herman Cornelis Marie

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

1935

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

van Dijk, H. C. M. (1935). *Involuties in de stralenruimte*. Noordhoff Uitgevers.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

ZUSAMMENFASSUNG.

Die projektive Liniengeometrie ist bekanntlich die Geometrie auf einer vierdimensionalen Fläche zweiter Ordnung in einem Raume R_5 von 5 Dimensionen. Die Geraden in R_5 , welche die Bildpunkte je zweier Strahlen verbinden, die einander zugeordnet sind in einer Involution, deren Strahlenpaare sich im allgemeinen nicht schneiden, bilden ein System S_4 von ∞^4 Geraden in R_5 , die im allgemeinen nicht auf der vierdimensionalen Fläche liegen.

Ein derartiges System hat drei Charakteristiken r_1, r_2, r_3 .

Die Charakteristik r_1 ist die Zahl der Geraden von S_4 , die durch einen gegebenen Punkt von R_5 gehen; r_2 Geraden des Systems liegen in einem vierdimensionalen Raume und schneiden überdies eine in diesem R_4 gegebene Gerade; in einem R_3 von R_5 liegen r_3 Geraden von S_4 . Die Charakteristiken des einer Involution I entsprechenden Systems S_4 werden die Rangzahlen der Involution genannt. In dieser Dissertation wird erörtert, welche die Strahleninvolutionen mit Rangzahlen ≤ 2 sind, für welche $r_1 = 1$, ist, während mindestens eine der Zahlen r_2 und r_3 den Wert 2 hat.

1. Gefunden sind folgende Systeme S_4 (1, 2, 0):

a. Jeder Punkt einer Geraden l ist Scheitel eines zu einem Büschel gehörenden Kegels V_4^2 ; die Strahlen von S_4 sind die Erzeugenden dieses Kegel. Ein durch l gehender R_4 berührt sämtliche Kegel des Büschels längs dieser Geraden.

b. Die Geraden von S_4 sind die Geraden, welche l und eine V_3^2 , mit welcher l einen Schnittpunkt hat, in im allgemeinen verschiedenen Punkten schneiden. (Sonderfall von a.).

c. Die Punkte der Geraden l werden den quadratischen Flächen eines in einem R_3 liegenden Büschels projektiv zugeordnet. Die Geraden durch einen Punkt von l in den Ebenen durch l und die Punkte der entsprechenden Fläche gehören zu S_4 .

d. Die R_4 eines Büschels schneiden eine Ebene U in Geraden, die durch den Schnittpunkt S des dreidimensionalen Achsenraumes mit U gehen. S ist ein Punkt eines in U liegenden Kegelschnittes k^2 . Die in einem R_4 des Büschels liegenden Geraden, die durch den von S verschiedenen Schnittpunkt des R_4 mit k^2 gehen, gehören zu S_4 .

Die Involution, die dem Systeme a entspricht, kann in folgender Weise beschrieben werden:

Eine Gerade l_1 ist Doppelstrahl eines quadratischen Komplexes Γ_1^2 , zu dem eine Gerade l_2 gehört, welche Doppelstrahl eines Kom-

plexes Γ_2^2 ist, in dem l_1 liegt. Die durch l_1 und l_2 gehenden Regelschaaren der beiden Komplexe liegen in einem und demselben Gewinde C. Eine Gerade t bestimmt mit l_1 und l_2 eine Regelschaar ρ^2 ; ausser dem Doppelstrahle und l_2 gehört eine Gerade p von ρ^2 zu Γ_1^2 ; es sei q die dritte zu Γ_2 gehörende Gerade der Regelschaar. In der durch die Geradenpaare l_1, p und l_2, q bestimmten Involution in ρ^2 wird der Geraden t eine Gerade t' zugeordnet.

Im Falle d betrachten wir einen Büschel (C) und eine einfach unendliche quadratische Menge V^2 von Gewinden; V^2 gehört zu einem Netze N von linearen Komplexen. Das Gewinde S von N, das sich mit dem Büschel (C) in Involution befindet, gehört zu V^2 . Jedes Gewinde C_i von (C) ist in Involution mit einem Büschel des Netzes, zu dem ausser S ein zweiter Komplex Γ_i von V^2 gehört. Die in I einem Strahle t von C_i entsprechende Gerade t' ist zu t in Bezug auf das Gewinde Γ_i konjugiert.

2. Es gibt nur entartete Involutionen mit Rangzahlen (1, 0, 2) oder (1, 1, 2).

3. Die Strahlen eines Systems S_4 (1, 1, 2) schneiden eine Ebene U. Die ∞^2 S-Geraden durch einen Punkt von U sind die Strahlen eines Bündels. Als S-Räume bezeichnen wir die R_3 , in denen diese Bündel liegen. Die ∞^1 S-Räume, welche die ∞^3 Strahlen von S_4 enthalten, die U in den Punkten einer Geraden schneiden, sind die R_3 einer auf einer V_4^2 mit einer Doppelgeraden liegenden Schaar.

a. Die Geraden, welche U und zwei gegebene dreidimensionale Räume schneiden, sind die Strahlen von S_4 .

b. Eine Gerade c in U gehört zu S_4 und ist Doppelstrahl der V_4^2 , auf der die Geraden von S_4 liegen, welche c schneiden. Zu jeder Geraden der Ebene U gehört ein Doppelstrahl einer V_4^2 , in jedem S-Raume liegt eine Regelschaar von Doppelstrahlen; die Doppelstrahlen bilden eine V_3^3 .

c. Die S-Räume gehen durch eine feste Gerade l , die U schneidet. Die Schnittpunkte der S-Räume mit einer Ebene V sind den Punkten von U, welche die Scheitel der in den S-Räumen liegenden Bündel von S_4 sind, in einer bestimmten quadratischen Verwandtschaft zugeordnet.

d. In U liegt ein Büschel S von zu S_4 gehörenden Strahlen. Die S-Räume gehen durch den Punkt S und haben keine gemeinsame Gerade. Auf eine nähere Beschreibung musz hier verzichtet werden.

e. Die S-Räume gehen durch die Ebene U. Wenn wir jedem Punkte P einer Ebene V den Punkt P' von U zuordnen, durch wel-

chen die in dem durch P und U bestimmten R_3 liegenden Geraden von S_4 gehen, ergibt sich, dass die Punkte von U und V sich in einer quadratischen Verwandtschaft entsprechen.

Ich beschreibe nur die zu a gehörende Involution I . In jedem von zwei gegebenen Gewindebüscheln befindet sich ein Komplex, zu dem eine gegebene Gerade t gehört; t bestimmt mit einer gegebenen Regelschaar ein Strahlennetz C . Die der Geraden t in I zugeordnete Gerade t' ist der zweite gemeinsame Strahl der Kongruenz C und der Schnittkongruenz der beiden Gewinde.

4. Die Systeme S_4 (1, 2, 2).

a. Die Strahlen von S_4 sind die Geraden, welche eine in einem Raume C_3 liegende quadratische Fläche O^2 und zwei dreidimensionale Räume schneiden¹⁾, deren Schnittgeraden mit C_3 auf O^2 liegen und sich schneiden.

b. Die Geraden, welche eine quadratische Fläche O^2 und eine Ebene, mit der O^2 einen Schnittpunkt hat, in verschiedenen Punkten schneiden, sind die Strahlen von S_4 .

c. Eine Ebene U schneidet eine quadratische Fläche O^2 in einem Punkte C . O^2 liegt in einem Raume C_3 . Die Punkte S und T einer durch C gehenden Geraden der Ebene sind Scheitel zweier Geradenbüschel in U . Durch den Punkt C wird eine Tangente c an O^2 gezogen. Die in C_3 liegenden Ebenen durch die Gerade c werden den Strahlen des Büschels S projektiv zugeordnet. Die Gerade SC entspricht der Tangentenebene. Die Geraden von S_4 , die durch einen Punkt P von U gehen, sind die Strahlen der Büschel mit Scheitel P in den Ebenen durch die Gerade TP und die Punkte des Kegelschnittes der Fläche O^2 in der Ebene des Raumes C_3 , die dem Strahle SP des Büschels S entspricht.

d. Die S -Geraden schneiden eine Ebene U . Jeder Punkt von U ist Scheitel zweier Bündel. Die Räume, in denen die Bündel liegen, gehen durch U . Zu jedem Punkte P einer Ebene V gehört ein Punkt P' in U , der Scheitel ist des in dem durch P und U bestimmten R_3 liegenden Bündels von S_4 . Einem Punkte P' von U entsprechen die Schnittpunkte der beiden R_3 , welche die durch P' gehenden Strahlen von S_4 enthalten, mit der Ebene V . Es ergibt sich, dass die Punkte der Ebenen U und V einander in einer 2—1-deutigen quadratischen Verwandtschaft zugeordnet sind.

Die entsprechenden Strahleninvolutionen lassen sich nicht kurz beschreiben.

¹⁾ In verschiedenen Punkten.